

Appendices

A Appendix: Original Items in German

A.1 Statements

Erste Behauptung: „Die Summe von 2 beliebigen ungeraden Zahlen ist immer gerade.“
Zweite Behauptung: „In jedem beliebigen Dreieck ist die Summe der Innenwinkel immer 180° .“
Dritte Behauptung: „Das Produkt von 2 beliebigen ungeraden Zahlen ist immer ungerade.“
Vierte Behauptung: „Die Summe von 3 beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.“
Fünfte und letzte Behauptung: „In jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate immer genauso groß, wie das Quadrat der Hypotenuse.“

Figure A.1: Statements (original items in German)

A.2 Provided Arguments

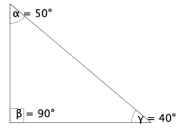
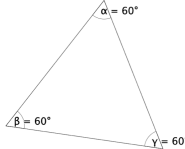
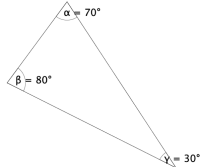
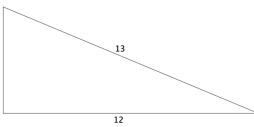
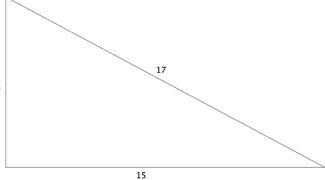
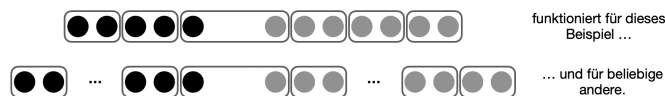
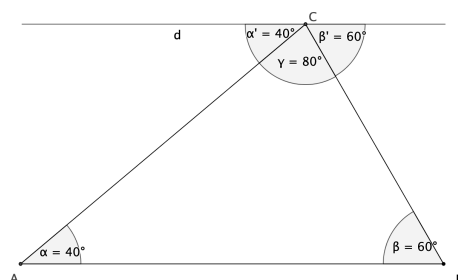
<u>Begründung (Aussage 1):</u> „Ich habe mir verschiedene Beispiele angeschaut und die Behauptung überprüft: $1 + 3 = 4, \quad 5 + 7 = 12, \quad 7 + 11 = 18 \quad \text{und} \quad 9 + 13 = 22 \dots$ <u>Begründung (Aussage 2):</u> „Ich habe mir verschiedene Dreiecke angeschaut und die Behauptung überprüft:“  $50^\circ + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$  $60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$  $70^\circ + 80^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ <u>Begründung (Aussage 3):</u> „Ich habe mir verschiedene Beispiele angeschaut und die Behauptung überprüft: $3 \cdot 3 = 9, \quad 5 \cdot 7 = 35, \quad 7 \cdot 11 = 77$ und $9 \cdot 13 = 117 \dots$“ <u>Begründung (Aussage 4):</u> „Ich habe mir verschiedene Beispiele angeschaut und die Behauptung überprüft: $1 + 2 + 3 = 6, \quad 5 + 6 + 7 = 18, \quad 13 + 14 + 15 = 42$ und $27 + 28 + 29 = 84 \dots$“ <u>Begründung (Aussage 5):</u> „Ich habe mir verschiedene Dreiecke angeschaut und die Behauptung überprüft:“  $3^2 + 4^2 = 5^2$ $9 + 16 = 25$  $5^2 + 12^2 = 13^2$ $25 + 144 = 169$  $8^2 + 15^2 = 17^2$ $64 + 225 = 289$
--

Figure A.2: Empirical arguments (original items in German)

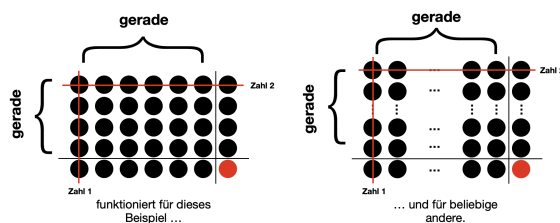
Begründung (Aussage 1): „Jede ungerade Zahl kann man so aufteilen, dass lauter Zweierpaare entstehen und genau ein Einer übrig bleibt (z.B. besteht die 5 aus zwei Zweierpaaren und einem Einer). Wenn man zwei ungerade Zahlen addiert – zum Beispiel wie im Bild 5 und 7 – kann man die beiden übrig gebliebenen Einer ebenfalls als Paar zusammenfassen, sodass diese Summe dann nur aus Zweierpaaren besteht und deshalb gerade ist.“



Begründung (Aussage 2): „Wir betrachten das abgebildete Dreieck ABC mit den Winkeln $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\gamma = 80^\circ$. d ist die Parallele zur Seite AB durch den Punkt C . Dann ist $\alpha = \alpha' = 40^\circ$ und $\beta = \beta' = 60^\circ$, da α und α' ebenso wie β und β' jeweils Wechselwinkel an der parallelen Geraden d sind. Damit folgt, dass $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 40^\circ + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ ist. Das funktioniert so für jedes beliebige Dreieck.“



Begründung (Aussage 3): „Jede ungerade Zahl kann man so aufteilen, dass lauter Zweierpaare entstehen (dieser Teil ist also gerade) und genau ein Einer übrig bleibt (z.B. besteht die 5 aus zwei Zweierpaaren und einem Einer). Stellt man das Produkt von zwei ungeraden Zahlen als Fläche dar, kann man wieder Zweierpaare bilden, sodass genau ein Einer (rot im Bild) übrig bleibt. Also ist das Produkt von 2 beliebigen ungeraden Zahlen ungerade.“



Begründung (Aussage 4): „Die erste Summe ist durch 6 teilbar (siehe Bild). Pro Summand kommen in der nächsten Summe jeweils 2 dazu, insgesamt also 6. Damit ist jede Summe von 3 beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 6 teilbar.“

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & = & 6 \\ +2 \downarrow & & +2 \downarrow & & +2 \downarrow & & +6 \downarrow \\ 3 & + & 4 & + & 5 & = & 12 \end{array}$$

Begründung (Aussage 5): „Die beiden abgebildeten großen Quadrate haben die gleichen Seitenlängen (nämlich 7) und damit auch denselben Flächeninhalt. Auch die vier identischen rechtwinkligen Dreiecke haben in beiden Abbildungen jeweils den gleichen Flächeninhalt. Die beiden großen Quadrate unterscheiden sich damit nur in der Anordnung der vier Dreiecke und der daraus resultierenden Aufteilung der blauen Fläche. Das blaue Quadrat (Hypotenusenquadrat) im linken Bild ist damit also genauso groß wie die Summe der beiden kleineren blauen Quadrate (Kathetenquadrate) im rechten Bild. Da dies für beliebige rechtwinklige Dreiecke funktioniert, ist also das Hypotenusenquadrat immer genauso groß wie die Summe der beiden Kathetenquadrate.“

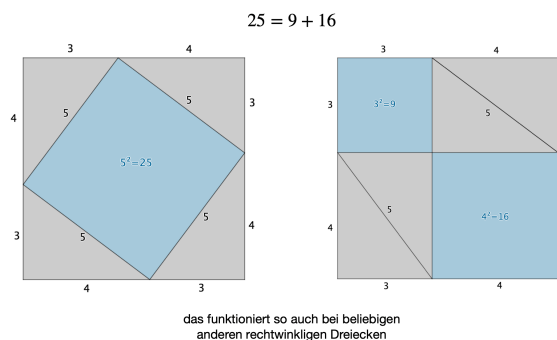


Figure A.3: Generic proofs (original items in German)

Begründung (Aussage 1): „Da jede gerade Zahl durch zwei teilbar ist, kann man gerade Zahlen schreiben als $2n$, wobei n eine ganze Zahl ist. Da die nächstgrößere Zahl einer geraden Zahl immer ungerade ist, lässt sich jede ungerade Zahl als $2n + 1$ schreiben. Für die erste ungerade Zahl schreibe ich also $2k + 1$ und für die zweite $2m + 1$, wobei k und m jeweils ganze Zahlen sind. Damit erhalte ich für die Summe:

$$(2k + 1) + (2m + 1) = 2k + 2m + 1 + 1 = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1),$$

wobei $k + m + 1$ eine ganze Zahl ist. Also ist die Summe von 2 ungeraden Zahlen durch 2 teilbar und somit eine gerade Zahl.“

Begründung (Aussage 2): „Wir betrachten ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α , β und γ . Wir zeichnen eine Parallele d zur Seite AB durch den Punkt C. Den Winkel zwischen der Seite AC und d bezeichnen wir mit α' und den Winkel zwischen der Seite BC und d mit β' . Dann sind α und α' ebenso wie β und β' jeweils Wechselwinkel an der zu AB parallelen Geraden d . Also folgt $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Da α' , β' und γ einen gestreckten Winkel an der Geraden d bilden, gilt $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$. Insgesamt folgt also, dass $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ ist. Die Summe der Innenwinkel beträgt damit in jedem Dreieck 180° .“

Begründung (Aussage 3): „Jede ungerade Zahl kann man schreiben als $2n + 1$, wobei n eine ganze Zahl ist. Die erste ungerade Zahl lässt sich also schreiben als $2k + 1$ und die zweite als $2m + 1$, wobei k und m jeweils ganze Zahlen sind. Für das Produkt erhalte ich dann:

$$(2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1.$$

Da $2km + k + m$ eine ganze Zahl ist, ist $2(2km + k + m)$ gerade und damit $2(2km + k + m) + 1$ ungerade.“

Begründung (Aussage 4): „Eine natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade. Für die Summe von drei beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen kann ich also schreiben $(2n - 1) + 2n + (2n + 1)$, wobei n eine ganze Zahl ist. Daraus ergibt sich:

$$(2n - 1) + 2n + (2n + 1) = 2n + 2n + 2n - 1 + 1 = 3 \cdot 2n = 6n,$$

also ist die Summe von 3 beliebigen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 6 teilbar.“

Begründung (Aussage 5): „Wir betrachten ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c . Wir ordnen vier identische Kopien dieses Dreiecks zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ an, sodass die rechten Winkel der Dreiecke in den Ecken dieses Quadrats liegen und in der Mitte ein gedrehtes Quadrat mit Seitenlänge c frei bleibt (die Ecken dieses kleineren Quadrats liegen auf den Kanten des Quadrats mit Seitenlänge $a + b$, nämlich dort, wo sich die Kathete a von einem Dreieck und die Kathete b eines anderen Dreiecks treffen). Der Flächeninhalt des großen Quadrats beträgt $(a + b)^2$. Andererseits erhalten wir den Flächeninhalt dieses Quadrats auch als Summe der Flächeninhalte der vier Dreiecke und des Quadrats mit Seitenlänge c . Der Flächeninhalt der vier Dreiecke beträgt zusammen $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2 \cdot a \cdot b$. Es gilt also, dass $(a + b)^2 = 2 \cdot a \cdot b + c^2$ ist. Mit der 1. binomischen Formel und Umformung erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= 2 \cdot a \cdot b + c^2 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 &= 2 \cdot a \cdot b + c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Kathetenquadrate ist also genauso groß wie das Hypotenusenquadrat.“

Figure A.4: Ordinary proofs (original items in German)

A.3 Questions

Ist die Behauptung richtig?

- ☐ Ja, ich bin absolut sicher, die Behauptung ist richtig.
- ☐ Ich glaube schon, bin mir aber nicht sicher.
- ☐ Ich glaube nicht, bin mir aber nicht sicher.
- ☐ Nein, ich bin absolut sicher, die Behauptung ist falsch.
- ☐ Ich habe keine Ahnung.

Figure A.5: Estimation of truth (original item in German)

Können Sie die Begründung nachvollziehen?

- ☐ Ja, ich kann die Begründung vollständig nachvollziehen.
- ☐ Ich kann die Begründung nur teilweise nachvollziehen.
- ☐ Nein, ich kann die Begründung gar nicht nachvollziehen.

Figure A.6: Proof comprehension (original closed item in German)

Bitte beschreiben Sie kurz, was Sie an der Begründung nicht verstanden haben.

Figure A.7: Aspects of proof comprehension (original open-ended item in German)

Überzeugt Sie die Begründung davon, dass die Behauptung richtig ist?

- ☐ Ja, mich überzeugt die Begründung vollständig.
- ☐ Mich überzeugt die Begründung nur teilweise.
- ☐ Nein, mich überzeugt die Begründung gar nicht.

Figure A.8: Conviction (original closed item in German)

Bitte beschreiben Sie kurz, wieso Sie die Begründung nicht von der Richtigkeit der Behauptung überzeugt hat.

Figure A.9: Aspects influencing conviction (original open-ended item in German)

Gibt es zwei ungerade Zahlen, deren Summe ungerade ist?

☐ Ja, solche Zahlen gibt es sicher.

☐ Ich glaube, solche Zahlen könnte es geben.

☐ Ich glaube nicht, dass es solche Zahlen gibt.

☐ Nein, es gibt solche Zahlen definitiv nicht.

☐ Ich habe keine Ahnung.

Gibt es Dreiecke, deren Innenwinkelsumme nicht 180° beträgt?

☐ Ja, solche Dreiecke gibt es sicher.

☐ Ich glaube, solche Dreiecke könnte es geben.

☐ Ich glaube nicht, dass es solche Dreiecke gibt.

☐ Nein, es gibt solche Dreiecke definitiv nicht.

☐ Ich habe keine Ahnung.

Gibt es zwei ungerade Zahlen, deren Produkt gerade ist?

☐ Ja, solche Zahlen gibt es sicher.

☐ Ich glaube, solche Zahlen könnte es geben.

☐ Ich glaube nicht, dass es solche Zahlen gibt.

☐ Nein, es gibt solche Zahlen definitiv nicht.

☐ Ich habe keine Ahnung.

Gibt es drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Summe nicht durch 6 teilbar ist?

☐ Ja, solche Zahlen gibt es sicher.

☐ Ich glaube, solche Zahlen könnte es geben.

☐ Ich glaube nicht, dass es solche Zahlen gibt.

☐ Nein, es gibt solche Zahlen definitiv nicht.

☐ Ich habe keine Ahnung.

Gibt es rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenusenquadrat nicht gleich der Summe der Kathetenquadrate ist?

☐ Ja, solche rechtwinkligen Dreiecke gibt es sicher.

☐ Ich glaube, solche rechtwinkligen Dreiecke könnte es geben.

☐ Ich glaube nicht, dass es solche rechtwinkligen Dreiecke gibt.

☐ Nein, es gibt solche rechtwinkligen Dreiecke definitiv nicht.

☐ Ich habe keine Ahnung.

Figure A.10: Existence of counterexamples (original items in German)

Warum sind Sie der Meinung bzw. glauben Sie, dass die Behauptung richtig bzw. falsch ist?



Figure A.11: Justification (original item in German)

Wie schwierig fanden Sie die Ihnen eben gestellten Fragen zu den fünf Behauptungen?

- ☐ Sehr schwierig.
- ☐ Eher schwierig.
- ☐ Eher einfach.
- ☐ Sehr einfach.

Figure A.12: Difficulty of questions (original item in German)

Was bedeutet es, wenn eine mathematische Aussage (z.B. „Das Produkt von 2 beliebigen ungeraden Zahlen ist immer ungerade“) „allgemeingültig“ ist?

- ☐ Dass die Aussage für viele Fälle (z.B. für viele ungerade Zahlen) richtig ist.
- ☒ Dass die Aussage im Allgemeinen gültig ist, also bis auf wenige Ausnahmen richtig ist.
- ☐ Dass die Aussage ohne jegliche Ausnahmen richtig ist.
- ☐ Etwas anderes, und zwar:

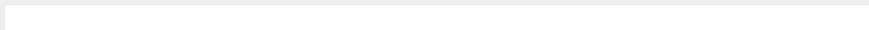


Figure A.13: Meaning of generality (original item in German)

A.4 Cognitive Reflexion Test

Ein Schläger und ein Ball kosten zusammen 1,10 €. Der Schläger kostet 1,00 € mehr als der Ball. Wie viel kostet der Ball?

Bitte geben Sie den Betrag in Euro an.

In einem Teich befinden sich Seerosen, die sich jeden Tag verdoppeln. Wenn es 48 Tage dauert, bis die Seerosen den ganzen Teich bedecken, wie lange würde es dauern, bis sie den halben Teich bedecken?

Bitte geben Sie die Zeit in Tagen an.

Wie viele Kubikmeter Erde sind in einem 3m breiten, 3m langem und 3m tiefem Loch?

Bitte geben Sie eine ganze Zahl ein.

Jerry hatte die 15. höchste und 15. niedrigste Punktzahl bei der letzten Klassenarbeit. Wie viele Schüler*innen sind insgesamt in dieser Klasse?

Bitte geben Sie eine ganze Zahl ein.

Figure A.14: CRT items (original items in German)

B Appendix: Coding Protocol (in German)

B.1 Allgemeine Anmerkungen

In den folgenden Abschnitten ist jeweils zunächst das jeweilige Kategoriensystem inkl. Beispielen abgebildet. Darauf folgen einige ergänzende Hinweise, zur Unterscheidung bestimmter Kategorien bzw. wie mit konkreten Unsicherheiten jeweils umgegangen werden kann. Um den Kodiervorgang einfacher und objektiver zu machen, wurden außerdem Entscheidungsbäume erstellt. Diese sind am Ende eines jeden Abschnitts abgebildet. Zu Beginn der folgenden Abschnitte wird zudem konkretisiert, welche Gruppen (Spalte „group“) und Aussagen (Spalte „statement“) bzgl. der jeweiligen Items berücksichtigt werden, da nicht immer alle Antworten kodiert werden müssen. Zum Überblick:

- Teilnehmende in **Gruppe A** haben keine Begründungen erhalten. Sie wurden dafür zum Begründen der Aussagen aufgefordert.
- Teilnehmende in **Gruppe B** haben empirische Begründungen erhalten.
- Teilnehmende in **Gruppe C** haben generische Beweise erhalten.
- Teilnehmende in **Gruppe D** haben gewöhnliche/traditionelle Beweise erhalten.

Kodiert werden jeweils 20% der Daten bzw. mind. 20 Antworten.

Ergänzender Hinweis zum Kodieren der geometrischen Aussagen

Um Studierende nicht mit unbekannten Begriffen/Konzepten zu verunsichern wurde bei den geometrischen Aussagen darauf verzichtet, Bezug zu euklidischer/ebener Geometrie zu nehmen. Dies hatte zur Folge, dass einige wenige Studierende die Aussage(n) deshalb als falsch bewertet habe. Falls eine Antwort Bezug darauf nimmt, dass die Aussage falsch ist, weil sie nur in der euklidischen Ebene richtig ist → mit X kodieren (es sei denn, es ist zu erkennen, dass der*die Student*in sich zwar der Tatsache bewusst ist, aber in der Antwort von euklidischer Geometrie ausgeht).

B.2 Proof Evaluation: Conviction

Kodiert werden die Antworten in Spalte „argmt_nconv_expl“ der Gruppen B, C, D bzgl. der Aussagen 1 und 2 sowie die Antworten der Gruppen C und D bzgl. der Aussagen 3 und 5 (die falsche Aussage 4 wird also NICHT berücksichtigt). Die entsprechenden Codes werden in Spalte „conviction“ eingetragen. Tabelle ?? gibt einen Überblick über die jeweiligen Codes. Der Entscheidungsbaum, der in Abbildung ?? zu sehen ist, stellt zudem eine algorithmische Entscheidungshilfe dar. Der Algorithmus bricht ab, sobald ein Code vergeben wurde. Falls an einer Stelle keine Entscheidung getroffen werden kann, wird der Code 0 (unklar) vergeben.

Code	Ausprägung	Beschreibung	Beispiel
NA	keine Antwort	Es wurde keine Antwort eingegeben oder die*der Studierende gibt an es nicht zu wissen.	„weiß nicht“
0	unklare Antwort	Es wird behauptet, dass die Aussage (doch) als überzeugend empfunden wurde oder die Antwort ist in anderer Art unklar.	„An sich hat mich die Begründung überzeugt, jedoch nur weil es alles beispielhaft erläutert ist.“
1	Verständnis	Die Behauptung (z.B. darin enthaltene Begriffe) oder die Begründung wurde(n) (scheinbar) nicht verstanden.	„Wahrscheinlich weil ich sie [die Begründung] nicht 100% verstehe.“; „Weil die Begründung nur für natürliche einstellige Zahlen angeben ist und nicht für andere Fälle, z.B. den ganzen Zahlen oder den rationalen Zahlen“ (der Gültigkeitsbereich der Aussage scheint nicht klar zu sein)
2	Korrektheit	Es wird behauptet, die Aussage bzw. der Beweis sei(en) falsch.	„da ich nicht glaube, dass es für jede beliebige Dreieck so funktioniert“
3	Umfang/Auswahl der Stichprobe	Es wird behauptet, dass die Anzahl der betrachteten Fälle zu klein ist, andere relevante Fälle nicht betrachtet wurden oder die Aussage wird mit zusätzlichen Beispielen überprüft.	„weil es zu wenig Beispiele sind“
4	Allgemeingültigkeit	Es wird (indirekt) Bezug auf die Allgemeingültigkeit des Arguments genommen, z.B. weil dieses nur aus Beispielen besteht.	„Es sind nur Beispiele angegeben, jedoch soll es ja für alle ungeraden Zahlen gelten.“
5	Darstellung/Art des Arguments	Es wird Bezug auf eine unangemessene, ungenaue oder abstrakte Art der Darstellung/Schreibweise/des Arguments genommen.	„Das Rechnen mit dem Rest-Einer klingt für mich sehr unmathematisch.“
6	Vertrautheit	Es wird Bezug darauf genommen, dass Student*in mit der Art/Darstellung des Arguments nicht vertraut ist.	„solche Beweise gab es in der Schule nicht“

Table B.1: Kategoriensystem zu Beweisevaluation hinsichtlich Überzeugung

Ergänzende Hinweise zum Kodieren von Beweisevaluation hinsichtlich Überzeugung

- Ob die Aussage oder die Begründung verstanden wurde, lässt sich manchmal (nur) indirekt erkennen. Z.B. wenn ausgedrückt wird, dass die Begründung

nicht alle relevanten Fälle abdeckt (obwohl dies der Fall ist). Häufig wurden in solchen Fällen Definitionen aus der Aussage nicht korrekt verstanden (z.B. gerade/ungerade Zahlen).

- Bei Unsicherheiten (v.a. bzgl. der 2. Frage im Entscheidungsbaum, ob angenommen wird, dass die Aussage falsch ist), kann Spalte „stm_correct“ herangezogen werden (1=sicher richtig, 2= glaube richtig, 3=glaube nicht richtig, 4=sicher nicht richtig, 5=weiß nicht).
- Auch die Antworten in Spalte „argmt_nunderstnd_expl“ (was wurde nicht verstanden) enthält manchmal Informationen dazu, was als nicht überzeugend empfunden wurde – diese Informationen sollen bei Unklarheit für die Kodierung von Überzeugung berücksichtigt werden.

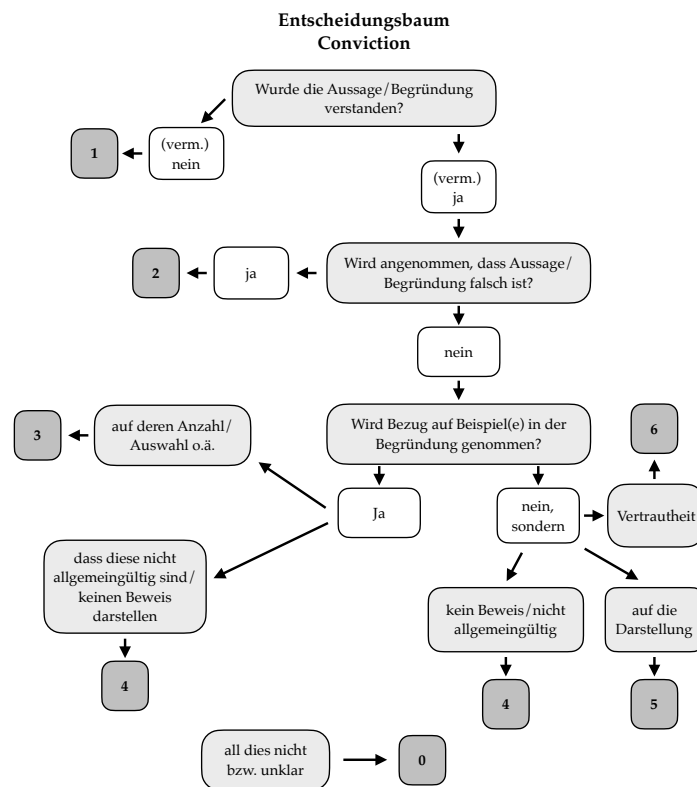


Figure B.1: Entscheidungsbaum zum Kodieren von „conviction“

B.3 Proof Comprehension

Kodiert werden die Antworten in Spalte „argmt_nunderstnd_expl“ der Gruppen C und D bzgl. der Aussagen 1, 2, 3 und 5 (die falsche Aussage 4 wird also NICHT berücksichtigt). Die entsprechenden Codes werden in Spalte „proof_comprehension“ eingetragen. Tabelle ?? gibt einen Überblick über die jeweiligen Codes. Der Entscheidungsbaum, der in Abbildung ?? zu sehen ist, stellt eine algorithmische Entscheidungshilfe dar. Der Algorithmus bricht ab, sobald ein Code vergeben wurde. Falls an einer Stelle keine Entscheidung getroffen werden kann, wird der Code 0 (unklar) vergeben.

Code	Ausprägung	Beschreibung	Beispiel
NA	keine Antwort	Es wurde keine Antwort eingegeben oder die*der Studierende gibt an es nicht zu wissen.	„Weiß ich nicht“
0	unklare Antwort	Es wird behauptet, dass die Aussage (doch) verstanden wurde oder die Antwort ist in anderer Art unklar.	„hab verstanden“
1	Unspezifisch	Es werden keine konkreten Aspekte, die nicht verstanden wurden, benannt	„Ich kann sie [die Begründung] nicht nachvollziehen, mir fehlt die Vorstellungskraft“
2	Bedeutung der Aussage	Die Aussage selbst (z.B. verwendete Begriffe darin) wurde (scheinbar) nicht verstanden.	„Was genau ist ein Produkt, einfach die Summe?“
3	Bedeutung von Ausdrücken, Aussagen und Abbildungen im Beweis	Die Bedeutung von Ausdrücken, Aussagen und/oder Abbildungen, die im Beweis verwendet werden, wurden (scheinbar) nicht verstanden.	„Ich weiß nicht was Wechselwinkel sind“; „warum die 1 außerhalb der Klammer ist“
4	Logischer Status und proof framework	Der Zweck von im Beweis benutzten Aussagen/Konzepten bzw. der Zusammenhang zwischen Teilen des Beweises und der Behauptung wurde(n) nicht verstanden.	„wieso man Wechselwinkel benutzt um die Behauptung zu begründen“; „nicht den Bezug zu der Behauptung verstanden“
5	Allgemeingültigkeit des Beweises	Es wurde (scheinbar) nicht verstanden, warum das Argument allgemeingültig ist (z.B. weil die wesentliche Beweisidee nicht verstanden wurde).	„ich habe nicht verstanden, warum die Begründung auf alle Produkte ungerader Zahlen anwendbar ist“

Table B.2: Kategoriensystem zu Beweisverständnis

Ergänzende Hinweise zum Kodieren von Beweisverständnis

- Wichtig: Auch wenn hier keine Antwort eingegeben wurde, wird ggf. kodiert. Nämlich dann, wenn a) bzgl. „conviction“ der Code 1 (Verständnis) vergeben wurde oder b) bzgl. „conviction“ ein Code ungleich 1 vergeben wurde, aber angegeben wurde, die Begründung nicht (vollständig) verstanden zu haben (2 oder 3 in Spalte „argmt_understnd“). In beiden Fällen wird die Antwort in Spalte „argmt_nconv_expl“ (warum die Begründung nicht von der Richtigkeit der Aussage überzeugt hat) zum Kodieren von Beweisverständnis herangezogen (auch wenn diese Antwort unklar ist – dann Code 0).
- Die Antworten in Spalte „argmt_nconv_expl“ können auch sonst bereits Informationen dazu enthalten, was nicht verstanden wurde – diese Informationen

werden bei der Kodierung von Beweisverständnis grundsätzlich berücksichtigt.

- *Warum* etwas nicht verstanden wurde (z.B. weil eine Illustration benötigt worden wäre) ist für das Kodieren von Beweisverständnis irrelevant. Entscheidend ist *was* nicht verstanden wurde.
- Ob die Aussage verstanden wurde, lässt sich manchmal (nur) indirekt erkennen. Z.B. wenn ausgedrückt wird, dass die Begründung nicht alle relevanten Fälle abdeckt (obwohl dies der Fall ist). Häufig wurden in solchen Fällen Definitionen aus der Aussage nicht korrekt verstanden (z.B. gerade/ungerade Zahlen).

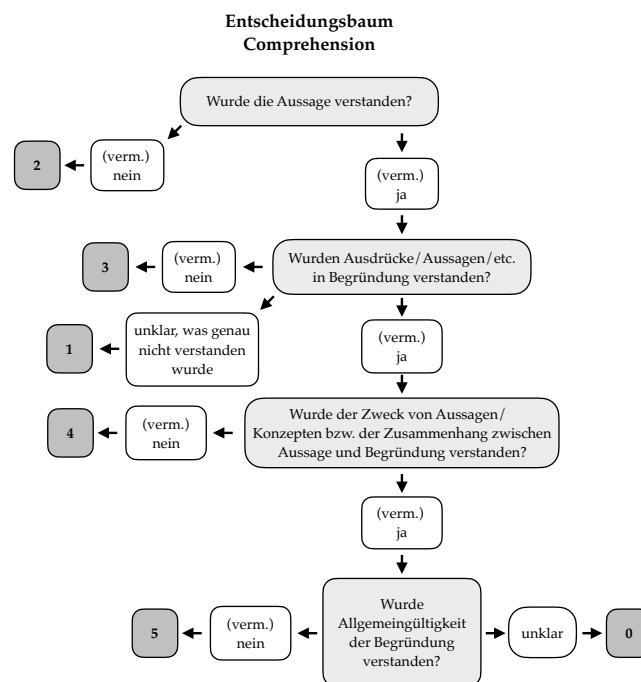


Figure B.2: Entscheidungsbaum zum Kodieren von „proof_comprehension“

B.4 Proof Schemes

Kodiert werden die Antworten in Spalte „argmt“ der Gruppe A bzgl. aller Aussagen. Die entsprechenden Codes werden in Spalte „proof_scheme“ eingetragen. Tabelle ?? gibt einen Überblick über die jeweiligen Codes. Der Entscheidungsbaum, der in Abbildung ?? zu sehen ist, stellt eine algorithmische Entscheidungshilfe dar. Im Gegensatz zu den anderen beiden Entscheidungsbäumen ist (auf der ersten Stufe) die Vergabe mehrerer Codes möglich (siehe Anmerkung weiter unten).

Ergänzende Hinweise zum Kodieren von Proof Schemes

- Unterscheidung von vollständigen und unvollständigen Argumenten:
 - Die Darstellung ist weniger relevant (z.B. egal ob narrativ oder symbolisch).
 - Entscheidend für Vollständigkeit: Es sollte klar ersichtlich sein, dass Student*in die jeweiligen wesentlichen Voraussetzungen und Beweisschritte in der Begründung berücksichtigt. Kleinere (formale) Lücken/Fehler sind dabei nicht bedeutsam.
 - Weiter unten werden die jeweiligen wesentlichen Beweisschritte/-aspekte bzgl. der einzelnen Aussagen aufgelistet.
- Unterscheidung von unvollständigen Argumenten und relevanten Aspekten:
 - Wenn nur relevante Aspekte (z.B. benötigte Definitionen, Eigenschaften o.ä.) genannt werden, diese aber nicht zu einem Argument ausgebaut werden → relevante Aspekte.
 - Wenn hingegen grundsätzlich zu erkennen ist, dass eine Argumentationskette aufgebaut wurde, diese jedoch nicht vollständig ist oder wenn die wesentliche Beweisidee erkennbar ist → unvollständiges Argument.
Beispiel: „Winkel auf einer Gerade zusammenfassbar“ – relevanter Aspekt, aber (weitere) wesentliche Beweisidee (Wechselwinkel) fehlt.
- Unterscheidung von Gegenbeispielen und empirischen Argumenten:
Die Spalte „stm_correct“ gibt an, wie der*die Student*in die Richtigkeit der Aussage eingeschätzt hat (1=sicher richtig, 2=glaube richtig, 3=glaube nicht richtig, 4=sicher nicht richtig, 5=weiß nicht). Diese Antworten können bei der Kodierung hilfreich sein. Beispiel: „durch Ausprobieren“ kann heißen, dass die Richtigkeit der Aussage bestätigt wurde (Richtigkeit der Aussage wurde dann wahrscheinlich mit 1 oder 2 bewertet) ODER dass durch Ausprobieren ein Gegenbeispiel gefunden wurde (Richtigkeit der Aussage wurde dann wahrscheinlich mit 3 oder 4 bewertet)

Code	Ausprägung	Beschreibung	Beispiel
NA	keine Antwort	Es wurde keine Antwort eingegeben oder die*der Studierende gibt an es nicht zu wissen.	„Weiß ich nicht“
0	unklare Antwort	Die Aussage wurde falsch verstanden oder die Antwort enthält keine Begründung bzw. ist in anderer Art unklar.	„Ich vermute es“; „weil die Zahl beim dreifachen Multiplizieren durch 6 teilbar ist“
1	Autoritätsargument	Es wird auf die Schule, einen Kurs, eine Lehrkraft o.ä. Bezug genommen.	„Ich hab das so gelernt“
2	Regel Argument	Es wird sich darauf bezogen, dass die Aussage eine allgemeine Regel/Gesetz, ein bekannter Satz o.ä. ist.	„Das ist ein immer geltendes Gesetz“; „gerade+gerade=gerade ungerade+gerade=ungerade und ungerade+ungerade=gerade“
3	empirisches Argument (kein erkennbares Bewusstsein von Allgemeingültigkeit)	Es werden Beispiele angegeben oder behauptet, dass die Aussage mit Beispielen überprüft wurde.	„Anhand von Beispiel“
4	empirisches Argument (Bewusstsein von Allgemeingültigkeit erkennbar)	Es werden Beispiele angegeben oder behauptet, dass die Aussage mit Beispielen überprüft wurde, aber es scheint ein Bewusstsein darüber zu geben, dass ein allgemeines Argument notwendig ist, z.B. weil behauptet wird, dass keine Gegenbeispiele gefunden wurden.	„Da mir keine Zahlen bekannt sind, wo das nicht zutrifft.“
5	Pseudoargument	Die Aussage selbst wird (in etwas anderen Worten) genannt oder die Begründung besteht aus Zirkelschlüssen, ist redundant, irrelevant, nicht zielführend oder falsch.	„Weil wenn die Summe nicht 180 Grad ist es kein Dreieck“; „Weil die Summe zweier Zahlen immer durch 2 teilbar ist.“; „weil nur aus einer geraden und ungeraden Zahl wieder eine ungerade Zahl rauskommt“
6	relevante Aspekte	Es werden relevante Aspekte genannt, die für eine Begründung herangezogen werden könnten, es wird jedoch keine Argumentationskette aufgebaut.	„Winkel auf einer Gerade zusammenfassbar“
7	transformatives Argument (unvollständig fehlerhaft)	Es wird ein teilweise korrektes generisches Argument angeführt, welches dadurch gekennzeichnet ist, dass ausgewählte Beispiele (und Operationen auf diesen) betrachtet werden und die Allgemeingültigkeit des Arguments gefolgert wird. Die Begründung enthält dabei Lücken bzw. Fehler.	„Weil es bei 1,3,5,7 und 9 funktioniert, also wird es bei allen Zahlen funktionieren.“
8	transformatives Argument (vollständig)	Es wird ein (im Wesentlichen) korrektes generisches Argument angeführt, welches dadurch gekennzeichnet ist, dass ausgewählte Beispiele (und Operationen auf diesen) betrachtet werden und die Allgemeingültigkeit des Arguments gefolgert wird.	kein Beispiel gefunden
9	deduktives Argument (unvollständig oder fehlerhaft)	Es wird ein teilweise korrekter (gewöhnlicher) Beweis angeführt, welcher jedoch Lücken bzw. Fehler enthält.	„Die beiden 1 er die zu viel sind kombinieren sich zu einer Geraden Zahl.“ (es fehlt: Summe von geraden Zahlen ist gerade, und warum dies so ist)
10	deduktives Argument (vollständig)	Es wird ein (im Wesentlichen) korrekter (gewöhnlicher) Beweis angeführt.	„Ungerade lassen sich als $2k + 1$ schreiben. Wenn ich also zwei ungerade Zahlen addiere sieht das so aus: $(2n + 1) + (2k + 1) = 2 * (n + k + 1)$, was immer gerade ist.“
11	Gegenbeispiel	Es wird (mind.) ein korrektes Gegenbeispiel gegeben oder behauptet, dass Gegenbeispiele gefunden wurden.	„da $2 + 3 + 4$ nicht durch 6 teilbar ist“

Table B.3: Kategoriensystem zu Beweisschemata

- Falls mehrere Kategorien passen:

Alle passenden Codes werden eingetragen. Beispiel: „ich meine es im Unterricht schon einmal gehört zu haben und anhand von zwei, drei einfachen Beispielen konnte ich auf die schnelle keine andere Lösung erkennen.“ → sowohl Autoritätssargument als auch empirisches.

Wesentliche Beweisschritte/-aspekte um jeweilige Aussagen zu beweisen/widerlegen:

- Aussage 1:

- Definition ungerade Zahl (z.B. gerade $+1$; $2n + 1$)
- Beim Addieren entsteht $+2$ / ergänzen sich die beiden 1er o.ä.
- Summe von geraden Zahlen ist gerade (durch 2 teilbar) und warum (entweder narrativ begründet oder algebraisch); Argumentation mit Rest bzw. modulo Rechnung möglich
- Alternativ: Nachweis für einstellige ungerade Zahlen erbringen und argumentieren, warum daraus Allgemeingültigkeit (für beliebige ungerade Zahlen) folgt (→ generisches bzw. transformatives Argument)
- Alternativ: Muster anhand von Beispiel erkennen und verallgemeinern (→ generisches bzw. transformatives Argument)

- Aussage 2:

- Konstruktion einer Parallelen (zu c)
- Wechselwinkel(satz)
- Winkel ergänzen sich zu gestrecktem Winkel (an der Parallelen)

- Aussage 3:

- Definition ungerade Zahl
- Summe von unger./ger. Zahlen nutzen (dabei wieder entw. algebraisch oder narrativ argumentieren)
- Alternativ: mit Primfaktorzerlegung argumentieren (Widerspruchsbeweis)
- Alternativ: Muster anhand von Beispiel erkennen und verallgemeinern (→ generisches bzw. transformatives Argument)

- Aussage 4:

- Gegenbeispiel angeben

- (algebraisch) argumentieren, dass Behauptung genau dann wahr ist, wenn erste Zahl ungerade ist.
- Aussage 5:
 - viele Möglichkeiten den Satz des Pythagoras zu beweisen (niemand hat hier relevante Aspekte benannt)
 - Der Vollständigkeit halber: Beweis z.B. über Anordnung von vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken in einem Quadrat, sodass einmal als Fläche c^2 „frei bleibt“ und einmal a^2 und b^2 . Entweder beispielbezogen (geometrisch oder anschaulich) argumentieren ($\rightarrow$ generisches Argument) oder allgemein (in der Regel) algebraisch.

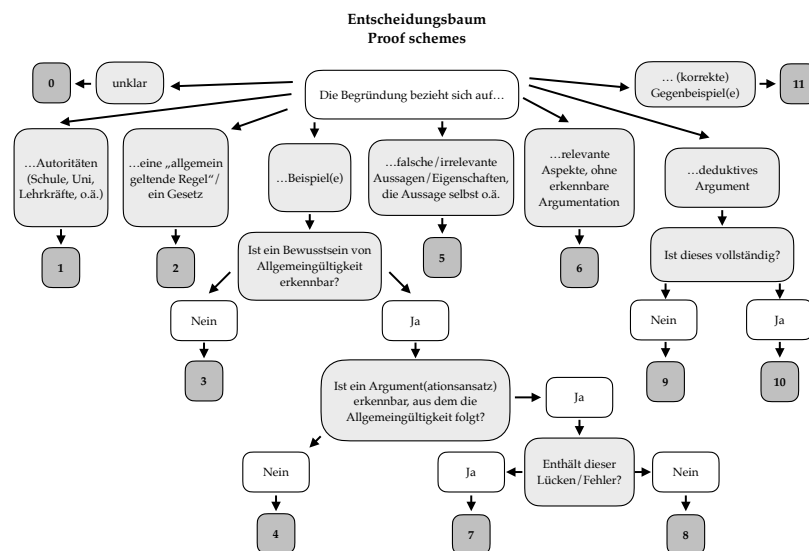


Figure B.3: Entscheidungsbaum zum Kodieren von „proof_schemes“